El problema inverso de Galois en $HoTop_*$

Cristina Costoya
Antonio Viruel

XIX Encuentro de Topología
A Coruña, 18 de octubre de 2012

El problema de Galois

El problema de Galois

- Fijemos $\mathcal{C}$ una categoría en la que trabajamos

El problema de Galois

- Fijemos $\mathcal{C}$ una categoría en la que trabajamos
- Dado un objeto X en $\mathcal{C}$ se calcula $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(X)$

El problema de Galois

- Fijemos $\mathcal{C}$ una categoría en la que trabajamos
- Dado un objeto X en $\mathcal{C}$ se calcula $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(X)$
- Lea usted las propiedades del objeto X en el grupo $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(X)$

El problema inverso de Galois

El problema inverso de Galois

El problema inverso de Galois

- Fijemos una categoría en la que trabajamos $\mathcal{C}$

El problema inverso de Galois

- Fijemos una categoría en la que trabajamos $\mathcal{C}$
- Consideremos un grupo (abstracto) G

El problema inverso de Galois

- Fijemos una categoría en la que trabajamos $\mathcal{C}$
- Consideremos un grupo (abstracto) G
- Encuéntrese un objeto X en $\mathcal{C}$ tal que $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(X)$

El problema inverso de Galois

- Fijemos una categoría en la que trabajamos $\mathcal{C}$
- Consideremos un grupo (abstracto) G
- Encuéntrese un objeto X en $\mathcal{C}$ tal que $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(X) \cong G$

El problema inverso de Galois

- Fijemos una categoría en la que trabajamos $\mathcal{C}$
- Consideremos un grupo (abstracto) G
- Encuéntrese un objeto X en $\mathcal{C}$ tal que $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(X) \cong G$

Decimos entonces que G es realizable en $\mathcal{C}$

El problema inverso de Galois

- Fijemos una categoría en la que trabajamos $\mathcal{C}$
- Consideremos un grupo (abstracto) G
- Encuéntrese un objeto X en $\mathcal{C}$ tal que $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(X) \cong G$

Decimos entonces que G es realizable en $\mathcal{C}$

Ejemplo 1

- $\mathcal{C} = HoTop_*$
- $G = \mathbb{Z}_2$

El problema inverso de Galois

- Fijemos una categoría en la que trabajamos $\mathcal{C}$
- Consideremos un grupo (abstracto) G
- Encuéntrese un objeto X en $\mathcal{C}$ tal que $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(X) \cong G$

Decimos entonces que G es realizable en $\mathcal{C}$

Ejemplo 1

- $\mathcal{C} = HoTop_*$
- $G = \mathbb{Z}_2$
- Entonces, $X = \mathbb{S}^n$

El problema inverso de Galois

- Fijemos una categoría en la que trabajamos $\mathcal{C}$
- Consideremos un grupo (abstracto) G
- Encuéntrese un objeto X en $\mathcal{C}$ tal que $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(X) \cong G$

Decimos entonces que G es realizable en $\mathcal{C}$

Ejemplo 1

- $\mathcal{C} = HoTop_*$
- $G = \mathbb{Z}_2$
- Entonces, $X = \mathbb{S}^n$

Ejemplo 2

- $\mathcal{C} = Groups$,
- $G = \mathbb{Z}_p$, p impar

El problema inverso de Galois

- Fijemos una categoría en la que trabajamos $\mathcal{C}$
- Consideremos un grupo (abstracto) G
- Encuéntrese un objeto X en $\mathcal{C}$ tal que $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(X) \cong G$

Decimos entonces que G es realizable en $\mathcal{C}$

Ejemplo 1

- $\mathcal{C} = HoTop_*$
- $G = \mathbb{Z}_2$
- Entonces, $X = \mathbb{S}^n$

Ejemplo 2

- $\mathcal{C} = Groups$,
- $G = \mathbb{Z}_p$, p impar
- Entonces, $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(X) \ncong \mathbb{Z}_p$, $\forall X$

El problema inverso de Galois

- Fijemos una categoría en la que trabajamos $\mathcal{C}$
- Consideremos un grupo (abstracto) G
- Encuéntrese un objeto X en $\mathcal{C}$ tal que $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(X) \cong G$

Decimos entonces que G es realizable en $\mathcal{C}$

Ejemplo 1

- $\mathcal{C} = HoTop_*$
- $G = \mathbb{Z}_2$
- Entonces, $X = \mathbb{S}^n$

Ejemplo 2

- $\mathcal{C} = Groups$,
- $G = \mathbb{Z}_p$, p impar
- Entonces, $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(X) \ncong \mathbb{Z}_p$, $\forall X$

¡Todo grupo finito no es realizable en *Groups*!

El problema inverso de Galois

- Fijemos una categoría en la que trabajamos $\mathcal{C}$
- Consideremos un grupo (abstracto) G
- Encuéntrese un objeto X en $\mathcal{C}$ tal que $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(X) \cong G$

Decimos entonces que G es realizable en $\mathcal{C}$

Ejemplo 1

- $\mathcal{C} = HoTop_*$
- $G = \mathbb{Z}_2$
- Entonces, $X = \mathbb{S}^n$

Ejemplo 2

- $\mathcal{C} = Groups$,
- $G = \mathbb{Z}_p$, p impar
- Entonces, $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(X) \ncong \mathbb{Z}_p$, $\forall X$

¡Todo grupo finito no es realizable en *Groups*!

¿Lo es en $HoTop_*$?

Nuestro Problema:

Sea $\mathcal{E}(X)$= el grupo de clases de homotopía de autoequivalencias homotópicas de X (todo con punto base)

Nuestro Problema:

Sea $\mathcal{E}(X)$= el grupo de clases de homotopía de autoequivalencias homotópicas de X (todo con punto base)

grupo finito G

Nuestro Problema:

Sea $\mathcal{E}(X)$= el grupo de clases de homotopía de autoequivalencias homotópicas de X (todo con punto base)

grupo finito G

$\Downarrow$ Realización

Nuestro Problema:

Sea $\mathcal{E}(X)$= el grupo de clases de homotopía de autoequivalencias homotópicas de X (todo con punto base)

grupo finito G

$\Downarrow$ Realización

¿$G \cong \mathcal{E}(X)$ para algún X?

El problema a vista de pájaro:

El problema a vista de pájaro: relevancia del problema

El problema a vista de pájaro: relevancia del problema

- Se trata de un problema que aparece de manera recursiva en artículos de revisión y listas de problemas abiertos:

  ▷ D. Kahn, *Realization problems for the group of homotopy classes of self-equivalences*, Math. Annal., 220 (1976)

  ▷D. Kahn *Some Research Problems on homotopy-self-equivalences, in: Groups of Self-Equivalences and Related Topics*, LNM., 1425, (1990)

  ▷ J. Rutter, *Spaces of homotopy self-equivalences. A Survey*, LNM., 1662, (1997).

  ▷ M. Arkowitz, *The group of self-homotopy equivalences-a survey, in: Groups of self-equivalences and related topics*, LNM., Springer, 1425 (1990)

  ▷ M. Arkowitz, *Problems on self-homotopy equivalences, in: Groups of homotopy self-equivalences and related topics*, Contemp. Math., 274 (2001)

  ▷ Y. Félix, *Problems on mapping spaces and related subjects, in: Homotopy theory of function spaces and related topics*, Contemp. Math., 519 (2010)

El problema a vista de pájaro: soluciones parciales

El problema a vista de pájaro: soluciones parciales

- El único procedimiento general conocido para atacar este problema es cuando $G = Aut(\pi), \pi$ un grupo.

El problema a vista de pájaro: soluciones parciales

- El único procedimiento general conocido para atacar este problema es cuando $G = Aut(\pi), \pi$ un grupo. Entonces $X = K(\pi, 1)$, ya que $\mathcal{E}(X) \cong Aut(\pi)$

El problema a vista de pájaro: soluciones parciales

- El único procedimiento general conocido para atacar este problema es cuando $G = Aut(\pi), \pi$ un grupo. Entonces $X = K(\pi, 1)$, ya que $\mathcal{E}(X) \cong Aut(\pi)$
- Aproximar $\mathcal{E}(X)$ mediante subgrupos distinguidos

$$\mathcal{E}_\sharp(X), \mathcal{E}_*(X), \mathcal{E}_\Omega(X), \dots$$

El problema a vista de pájaro: soluciones parciales

- El único procedimiento general conocido para atacar este problema es cuando $G = Aut(\pi), \pi$ un grupo. Entonces $X = K(\pi, 1)$, ya que $\mathcal{E}(X) \cong Aut(\pi)$
- Aproximar $\mathcal{E}(X)$ mediante subgrupos distinguidos

$$\mathcal{E}_\sharp(X), \mathcal{E}_*(X), \mathcal{E}_\Omega(X), \ldots$$

Teorema (Féderinov-Félix'07) Todo grupo racional, nilpotente, finitamente generado y 2-resoluble es realizable como $\mathcal{E}_\sharp(X)$ para algún espacio racional simplemente conexo X.

El problema a vista de pájaro: soluciones parciales

- El único procedimiento general conocido para atacar este problema es cuando $G = Aut(\pi), \pi$ un grupo. Entonces $X = K(\pi, 1)$, ya que $\mathcal{E}(X) \cong Aut(\pi)$
- Aproximar $\mathcal{E}(X)$ mediante subgrupos distinguidos

$$\mathcal{E}_\sharp(X), \mathcal{E}_*(X), \mathcal{E}_\Omega(X), \ldots$$

  Teorema (Féderinov-Félix'07) Todo grupo racional, nilpotente, finitamente generado y 2-resoluble es realizable como $\mathcal{E}_\sharp(X)$ para algún espacio racional simplemente conexo X.

- Sorprendentemente:

  (Arkowitz-Lupton'00, Benkhalifa'09) $\mathbb{Z}_2$ (y algunas sumas finitas de este grupo) es realizable como $\mathcal{E}(X)$ para algún espacio racional simplemente conexo X.

El problema a vista de pájaro: soluciones parciales

- El único procedimiento general conocido para atacar este problema es cuando $G = Aut(\pi), \pi$ un grupo. Entonces $X = K(\pi, 1)$, ya que $\mathcal{E}(X) \cong Aut(\pi)$
- Aproximar $\mathcal{E}(X)$ mediante subgrupos distinguidos

$$\mathcal{E}_\sharp(X), \mathcal{E}_*(X), \mathcal{E}_\Omega(X), \dots$$

  Teorema (Féderinov-Félix'07) Todo grupo racional, nilpotente, finitamente generado y 2-resoluble es realizable como $\mathcal{E}_\sharp(X)$ para algún espacio racional simplemente conexo X.

- Sorprendentemente:

  (Arkowitz-Lupton'00, Benkhalifa'09) $\mathbb{Z}_2$ (y algunas sumas finitas de este grupo) es realizable como $\mathcal{E}(X)$ para algún espacio racional simplemente conexo X.

¿Qué grupos finitos son realizables por espacios racionales simplemente conexos?

Un nuevo enfoque:

Un nuevo enfoque:

El problema inverso de Galois ha sido considerado en muchos otros contextos, y se ha demostrado que todo grupo finito puede ser realizado en ciertas categorías.

Un nuevo enfoque:

El problema inverso de Galois ha sido considerado en muchos otros contextos, y se ha demostrado que todo grupo finito puede ser realizado en ciertas categorías. La idea es entonces:

Un nuevo enfoque:

El problema inverso de Galois ha sido considerado en muchos otros contextos, y se ha demostrado que todo grupo finito puede ser realizado en ciertas categorías. La idea es entonces:

1. Considerar una categoría $\mathcal{C}$ en la cual todo grupo finito sea realizable.

Un nuevo enfoque:

El problema inverso de Galois ha sido considerado en muchos otros contextos, y se ha demostrado que todo grupo finito puede ser realizado en ciertas categorías. La idea es entonces:

1. Considerar una categoría $\mathcal{C}$ en la cual todo grupo finito sea realizable.
2. Construir un funtor "inteligente" $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightsquigarrow HoTop_*$ de tal manera que dado un grupo finito G y un objeto X en $\mathcal{C}$ tal que $G \cong \mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(X)$, se verifique que $G \cong \mathcal{E}(F(X))$.

Un nuevo enfoque:

El problema inverso de Galois ha sido considerado en muchos otros contextos, y se ha demostrado que todo grupo finito puede ser realizado en ciertas categorías. La idea es entonces:

1. Considerar una categoría $\mathcal{C}$ en la cual todo grupo finito sea realizable.
2. Construir un funtor "inteligente" $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightsquigarrow HoTop_*$ de tal manera que dado un grupo finito G y un objeto X en $\mathcal{C}$ tal que $G \cong \mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(X)$, se verifique que $G \cong \mathcal{E}(F(X))$.

Así que las preguntas son por tanto

Un nuevo enfoque:

El problema inverso de Galois ha sido considerado en muchos otros contextos, y se ha demostrado que todo grupo finito puede ser realizado en ciertas categorías. La idea es entonces:

1. Considerar una categoría $\mathcal{C}$ en la cual todo grupo finito sea realizable.
2. Construir un funtor "inteligente" $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightsquigarrow HoTop_*$ de tal manera que dado un grupo finito G y un objeto X en $\mathcal{C}$ tal que $G \cong \mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(X)$, se verifique que $G \cong \mathcal{E}(F(X))$.

Así que las preguntas son por tanto

¿Qué categoría $\mathcal{C}$ considerar?

Un nuevo enfoque:

El problema inverso de Galois ha sido considerado en muchos otros contextos, y se ha demostrado que todo grupo finito puede ser realizado en ciertas categorías. La idea es entonces:

1. Considerar una categoría $\mathcal{C}$ en la cual todo grupo finito sea realizable.
2. Construir un funtor "inteligente" $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightsquigarrow HoTop_*$ de tal manera que dado un grupo finito G y un objeto X en $\mathcal{C}$ tal que $G \cong \mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(X)$, se verifique que $G \cong \mathcal{E}(F(X))$.

Así que las preguntas son por tanto

¿Qué categoría $\mathcal{C}$ considerar?

¿Cómo construir el funtor $\mathcal{F}$?

Un nuevo enfoque: los grafos

Un nuevo enfoque: los grafos

Teorema (Realizabilidad en $\mathcal{C} = \mathit{Graphs}$; Frucht'39)

Todo grupo finito G es realizable como grupo de automorfismos de un grafo finito, conexo y simple, que denotaremos por $\mathcal{G}$.

Un nuevo enfoque: los grafos

Teorema (Realizabilidad en $\mathcal{C} = Graphs$; Frucht'39)

Todo grupo finito G es realizable como grupo de automorfismos de un grafo finito, conexo y simple, que denotaremos por $\mathcal{G}$.

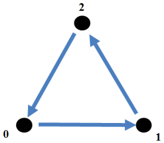
Ejemplo 1 ($G = \mathbb{Z}_3$; Grafo de Cayley $\to$ grafo simple)

Un nuevo enfoque: los grafos

Teorema (Realizabilidad en $\mathcal{C} = Graphs$; Frucht'39)

Todo grupo finito G es realizable como grupo de automorfismos de un grafo finito, conexo y simple, que denotaremos por $\mathcal{G}$.

Ejemplo 1 ($G = \mathbb{Z}_3$; Grafo de Cayley $\to$ grafo simple)

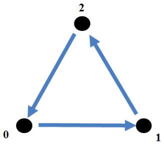


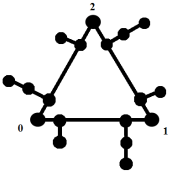
Un nuevo enfoque: los grafos

Teorema (Realizabilidad en $\mathcal{C} = \mathit{Graphs}$; Frucht'39)

Todo grupo finito G es realizable como grupo de automorfismos de un grafo finito, conexo y simple, que denotaremos por $\mathcal{G}$.

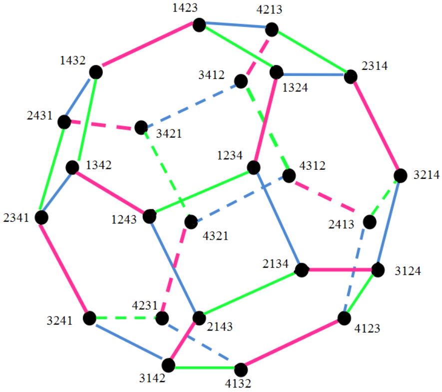
Ejemplo 1 ($G = \mathbb{Z}_3$; Grafo de Cayley $\rightarrow$ grafo simple)





Un nuevo enfoque: los grafos

Ejemplo 2 ($G = \Sigma_4$; Grafo de Cayley $\rightarrow$ grafo simple)



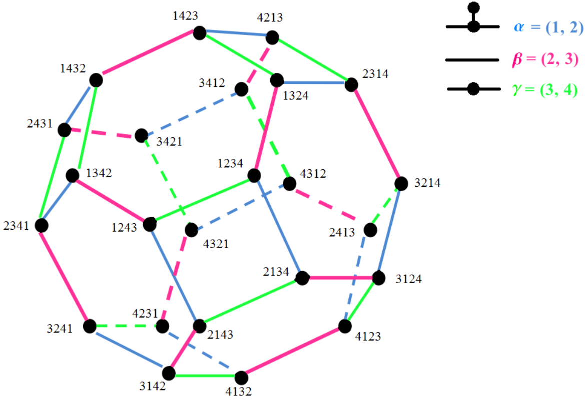
$\alpha = (1, 2)$

$\beta = (2, 3)$

$\gamma = (3, 4)$

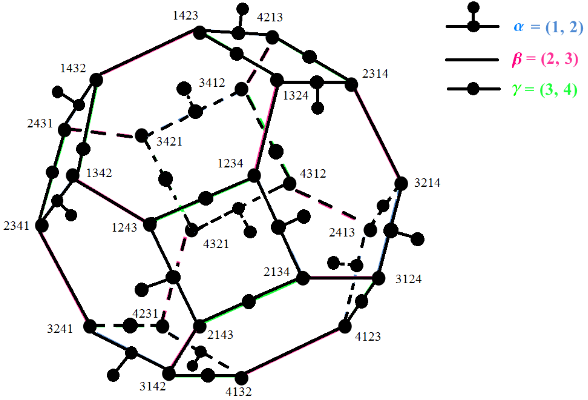
Un nuevo enfoque: los grafos

Ejemplo 2 ($G = \Sigma_4$; Grafo de Cayley $\rightarrow$ grafo simple)



Un nuevo enfoque: los grafos

Ejemplo 2 ($G = \Sigma_4$; Grafo de Cayley $\rightarrow$ grafo simple)



Un nuevo enfoque: el funtor

Un nuevo enfoque: el funtor

Problema'

Sea $\mathcal{G} = (V, E)$ un grafo finito, simple, y conexo (con más de un vértice). ¿Existe un espacio X tal que $\mathrm{Aut}(\mathcal{G}) \cong \mathcal{E}(X)$?

Un nuevo enfoque: el funtor

Problema'

Sea $\mathcal{G} = (V, E)$ un grafo finito, simple, y conexo (con más de un vértice). ¿Existe un espacio X tal que $\mathrm{Aut}(\mathcal{G}) \cong \mathcal{E}(X)$? ¿Podemos construir X de manera funtorial?

Un nuevo enfoque: el funtor

Problema'

Sea $\mathcal{G} = (V, E)$ un grafo finito, simple, y conexo (con más de un vértice). ¿Existe un espacio X tal que $\mathrm{Aut}(\mathcal{G}) \cong \mathcal{E}(X)$? ¿Podemos construir X de manera funtorial?

La respuesta a ambas preguntas es SÍ, y lo haremos en dos pasos

Un nuevo enfoque: el funtor

Problema'

Sea $\mathcal{G} = (V, E)$ un grafo finito, simple, y conexo (con más de un vértice). ¿Existe un espacio X tal que $\mathrm{Aut}(\mathcal{G}) \cong \mathcal{E}(X)$? ¿Podemos construir X de manera funtorial?

La respuesta a ambas preguntas es SÍ, y lo haremos en dos pasos

Sea *DGAs* la categoría (homotópica) de álgebras diferenciales graduadas sobre $\mathbb{Q}$. Entonces,

Un nuevo enfoque: el funtor

Problema'

Sea $\mathcal{G} = (V, E)$ un grafo finito, simple, y conexo (con más de un vértice). ¿Existe un espacio X tal que $\mathrm{Aut}(\mathcal{G}) \cong \mathcal{E}(X)$? ¿Podemos construir X de manera funtorial?

La respuesta a ambas preguntas es SÍ, y lo haremos en dos pasos

Sea *DGAs* la categoría (homotópica) de álgebras diferenciales graduadas sobre $\mathbb{Q}$. Entonces,

$$\mathit{Graphs} \rightsquigarrow \mathit{DGAs} \text{ (Costoya-V)}$$

Un nuevo enfoque: el funtor

Problema'

Sea $\mathcal{G} = (V, E)$ un grafo finito, simple, y conexo (con más de un vértice). ¿Existe un espacio X tal que $\mathrm{Aut}(\mathcal{G}) \cong \mathcal{E}(X)$? ¿Podemos construir X de manera funtorial?

La respuesta a ambas preguntas es SÍ, y lo haremos en dos pasos

Sea *DGAs* la categoría (homotópica) de álgebras diferenciales graduadas sobre $\mathbb{Q}$. Entonces,

$$Graphs \rightsquigarrow DGAs \text{ (Costoya-V)}$$

$$DGAs \rightsquigarrow HoTop_* \text{ (Sullivan)}$$

Un nuevo enfoque: DGA's

Un nuevo enfoque: DGA's

Un módulo graduado V sobre $\mathbb{Q}$

Un nuevo enfoque: DGA's

Un módulo graduado V sobre $\mathbb{Q}$ es una familia $\{V_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ de $\mathbb{Q}$-módulos. Si $v \in V_i$ decimos que v tiene grado i y escribimos $|v| = i$.

Un nuevo enfoque: DGA's

Un módulo graduado V sobre $\mathbb{Q}$ es una familia $\{V_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ de $\mathbb{Q}$-módulos. Si $v \in V_i$ decimos que v tiene grado i y escribimos $|v| = i$.

Un álgebra graduada sobre $\mathbb{Q}$

Un nuevo enfoque: DGA's

Un módulo graduado V sobre $\mathbb{Q}$ es una familia $\{V_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ de $\mathbb{Q}$-módulos. Si $v \in V_i$ decimos que v tiene grado i y escribimos $|v| = i$.

Un álgebra graduada sobre $\mathbb{Q}$ es un $\mathbb{Q}$-módulo graduado R junto con una aplicación lineal asociativa de grado cero, $R \otimes R \to R$, $x \otimes y \mapsto xy$, que tiene $1 \in R$.

Un nuevo enfoque: DGA's

Un módulo graduado V sobre $\mathbb{Q}$ es una familia $\{V_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ de $\mathbb{Q}$-módulos. Si $v \in V_i$ decimos que v tiene grado i y escribimos $|v| = i$.

Un álgebra graduada sobre $\mathbb{Q}$ es un $\mathbb{Q}$-módulo graduado R junto con una aplicación lineal asociativa de grado cero, $R \otimes R \to R$, $x \otimes y \mapsto xy$, que tiene $1 \in R$. Una derivación de grado k es una aplicación lineal $\theta\colon R \to R$ de grado k verificando $\theta(xy) = \theta(x)y + (-1)^{k|x|}\theta(y)$.

Un nuevo enfoque: DGA's

Un módulo graduado V sobre $\mathbb{Q}$ es una familia $\{V_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ de $\mathbb{Q}$-módulos. Si $v \in V_i$ decimos que v tiene grado i y escribimos $|v| = i$.

Un álgebra graduada sobre $\mathbb{Q}$ es un $\mathbb{Q}$-módulo graduado R junto con una aplicación lineal asociativa de grado cero, $R \otimes R \to R$, $x \otimes y \mapsto xy$, que tiene $1 \in R$. Una derivación de grado k es una aplicación lineal $\theta\colon R \to R$ de grado k verificando $\theta(xy) = \theta(x)y + (-1)^{k|x|}\theta(y)$.

Un álgebra diferencial graduada (DGA) sobre $\mathbb{Q}$

Un nuevo enfoque: DGA's

Un módulo graduado V sobre $\mathbb{Q}$ es una familia $\{V_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ de $\mathbb{Q}$-módulos. Si $v \in V_i$ decimos que v tiene grado i y escribimos $|v| = i$.

Un álgebra graduada sobre $\mathbb{Q}$ es un $\mathbb{Q}$-módulo graduado R junto con una aplicación lineal asociativa de grado cero, $R \otimes R \to R$, $x \otimes y \mapsto xy$, que tiene $1 \in R$. Una derivación de grado k es una aplicación lineal $\theta\colon R \to R$ de grado k verificando $\theta(xy) = \theta(x)y + (-1)^{k|x|}\theta(y)$.

Un álgebra diferencial graduada (DGA) sobre $\mathbb{Q}$ es una $\mathbb{Q}$-álgebra graduada R junto con un diferencial en R que es una derivación.

Un nuevo enfoque: DGA's

Un módulo graduado V sobre $\mathbb{Q}$ es una familia $\{V_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ de $\mathbb{Q}$-módulos. Si $v \in V_i$ decimos que v tiene grado i y escribimos $|v| = i$.

Un álgebra graduada sobre $\mathbb{Q}$ es un $\mathbb{Q}$-módulo graduado R junto con una aplicación lineal asociativa de grado cero, $R \otimes R \to R$, $x \otimes y \mapsto xy$, que tiene $1 \in R$. Una derivación de grado k es una aplicación lineal $\theta\colon R \to R$ de grado k verificando $\theta(xy) = \theta(x)y + (-1)^{k|x|}\theta(y)$.

Un álgebra diferencial graduada (DGA) sobre $\mathbb{Q}$ es una $\mathbb{Q}$-álgebra graduada R junto con un diferencial en R que es una derivación. Un morfismo de DGA's $f : (R, d) \to (E, d)$ es un morfismo de álgebras graduadas que satisface $fd = df$.

Un nuevo enfoque: DGA's

Un módulo graduado V sobre $\mathbb{Q}$ es una familia $\{V_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ de $\mathbb{Q}$-módulos. Si $v \in V_i$ decimos que v tiene grado i y escribimos $|v| = i$.

Un álgebra graduada sobre $\mathbb{Q}$ es un $\mathbb{Q}$-módulo graduado R junto con una aplicación lineal asociativa de grado cero, $R \otimes R \to R$, $x \otimes y \mapsto xy$, que tiene $1 \in R$. Una derivación de grado k es una aplicación lineal $\theta\colon R \to R$ de grado k verificando $\theta(xy) = \theta(x)y + (-1)^{k|x|}\theta(y)$.

Un álgebra diferencial graduada (DGA) sobre $\mathbb{Q}$ es una $\mathbb{Q}$-álgebra graduada R junto con un diferencial en R que es una derivación. Un morfismo de DGA's $f : (R, d) \to (E, d)$ es un morfismo de álgebras graduadas que satisface $fd = df$.

Las DGA's se entienden conmutativas en el sentido graduado, esto es

$$ab = (-1)^{|a|\cdot|b|}ba.$$

Un nuevo enfoque: DGA's

Un nuevo enfoque: DGA's

Dado un espacio "razonable" X, se le puede asociar una DGA denominada álgebra minimal de Sullivan $\mathcal{M}_X = \big(\Lambda(V), d\big)$ tal que

Un nuevo enfoque: DGA's

Dado un espacio "razonable" X, se le puede asociar una DGA denominada álgebra minimal de Sullivan $\mathcal{M}_X = \big(\Lambda(V), d\big)$ tal que

- $V = \big(\pi_*(X) \otimes \mathbb{Q}\big)^*$

Un nuevo enfoque: DGA's

Dado un espacio "razonable" X, se le puede asociar una DGA denominada álgebra minimal de Sullivan $\mathcal{M}_X = \big(\Lambda(V), d\big)$ tal que

- $V = \big(\pi_*(X) \otimes \mathbb{Q}\big)^*$
- $H^*(\mathcal{M}_X) \cong H^*(X; \mathbb{Q})$

Un nuevo enfoque: DGA's

Dado un espacio "razonable" X, se le puede asociar una DGA denominada álgebra minimal de Sullivan $\mathcal{M}_X = \big(\Lambda(V), d\big)$ tal que

- $V = \big(\pi_*(X) \otimes \mathbb{Q}\big)^*$
- $H^*(\mathcal{M}_X) \cong H^*(X; \mathbb{Q})$

Ejemplo:

$$(\mathcal{M}_{S^n}, d) = \begin{cases} \big(\Lambda(x_n), 0\big) & \text{si } n \text{ es impar} \\ \big(\Lambda(x_n, y_{2n-1}), dy_{2n-1} = x_n^2\big) & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Un nuevo enfoque: DGA's

Dado un espacio "razonable" X, se le puede asociar una DGA denominada álgebra minimal de Sullivan $\mathcal{M}_X = \big(\Lambda(V), d\big)$ tal que

- $V = \big(\pi_*(X) \otimes \mathbb{Q}\big)^*$
- $H^*(\mathcal{M}_X) \cong H^*(X; \mathbb{Q})$

Ejemplo:

$$(\mathcal{M}_{S^n}, d) = \begin{cases} \big(\Lambda(x_n), 0\big) & \text{si } n \text{ es impar} \\ \big(\Lambda(x_n, y_{2n-1}), dy_{2n-1} = x_n^2\big) & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Existe el funtor de realización de Sullivan que envía DGA's a complejos simpliciales (espacios), de manera que la categoría (homotópica) de DGA's (de tipo finito) es equivalente a la categoría homotópica punteada de espacios racionales (de tipo finito).

Un nuevo enfoque: el funtor *Graphs* $\rightsquigarrow$ *DGAs*

Un nuevo enfoque: el funtor *Graphs* $\rightsquigarrow$ *DGAs*

▷ Primero, nos restringimos a una subcategoría $\mathit{Graph}_{fm} \subset \mathit{Graph}$.

Un nuevo enfoque: el funtor *Graphs* $\rightsquigarrow$ *DGAs*

▷ Primero, nos restringimos a una subcategoría $Graph_{fm} \subset Graph$.

- $\mathcal{G} = (V, E)$, $|V| > 1$
- $f : \mathcal{G}_1 \hookrightarrow \mathcal{G}_2$ tal que $[v, w]$ es arista en $\mathcal{G}_1$ sii $[f(v), f(w)]$ lo es en $\mathcal{G}_2$

Un nuevo enfoque: el funtor *Graphs* $\rightsquigarrow$ *DGAs*

- ▷ Primero, nos restringimos a una subcategoría $Graph_{fm} \subset Graph$.
- ▷ Luego, construimos

$$A : Graph_{fm} \rightsquigarrow DGAs$$

Un nuevo enfoque: el funtor *Graphs* $\rightsquigarrow$ *DGAs*

- ▷ Primero, nos restringimos a una subcategoría $Graph_{fm} \subset Graph$.
- ▷ Luego, construimos

$$A : Graph_{fm} \rightsquigarrow DGAs$$

$$(A_{\mathcal{G}}, d) = \big(\Lambda(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, z) \otimes \Lambda(x_v, z_v | v \in V), d\big)$$

Un nuevo enfoque: el funtor *Graphs* $\rightsquigarrow$ *DGAs*

- Primero, nos restringimos a una subcategoría $Graph_{fm} \subset Graph$.
- Luego, construimos

$$A : Graph_{fm} \rightsquigarrow DGAs$$

$$(A_{\mathcal{G}}, d) = \big(\Lambda(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, z) \otimes \Lambda(x_v, z_v | v \in V), d\big)$$

- generadores en dimensiones: $|x_1| = 8, |x_2| = 10, |y_1| = 33, |y_2| = 35,$ $|y_3| = 37, |z| = 119, |x_v| = 40, |z_v| = 119,$

Un nuevo enfoque: el funtor *Graphs* $\rightsquigarrow$ *DGAs*

▷ Primero, nos restringimos a una subcategoría $Graph_{fm} \subset Graph$.

▷ Luego, construimos

$$A : Graph_{fm} \rightsquigarrow DGAs$$

$$(A_{\mathcal{G}}, d) = \big(\Lambda(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, z) \otimes \Lambda(x_v, z_v | v \in V), d\big)$$

- generadores en dimensiones: $|x_1| = 8, |x_2| = 10, |y_1| = 33, |y_2| = 35,$ $|y_3| = 37, |z| = 119, |x_v| = 40, |z_v| = 119,$
- diferenciales:

$$\begin{aligned}
d(x_1) &= 0 & d(y_3) &= x_1 x_2^3 \\
d(x_2) &= 0 & d(x_v) &= 0 \\
d(y_1) &= x_1^3 x_2 & d(z) &= y_1 y_2 x_1^4 x_2^2 - y_1 y_3 x_1^5 x_2 + y_2 y_3 x_1^6 + x_1^{15} + x_2^{12} \\
d(y_2) &= x_1^2 x_2^2 & d(z_v) &= x_v^3 + \textstyle\sum_{[v,w]\in E} x_v x_w x_2^4
\end{aligned}$$

Un nuevo enfoque: el funtor *Graphs* $\rightsquigarrow$ *DGAs*

▷ Primero, nos restringimos a una subcategoría $Graph_{fm} \subset Graph$.

▷ Luego, construimos

$$A : Graph_{fm} \rightsquigarrow DGAs$$

$$(A_{\mathcal{G}}, d) = \big(\Lambda(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, z) \otimes \Lambda(x_v, z_v | v \in V), d\big)$$

- generadores en dimensiones: $|x_1| = 8, |x_2| = 10, |y_1| = 33, |y_2| = 35,$ $|y_3| = 37, |z| = 119, |x_v| = 40, |z_v| = 119,$
- diferenciales:

$$\begin{array}{llll} d(x_1) = & 0 & d(y_3) = & x_1 x_2^3 \\ d(x_2) = & 0 & d(x_v) = & 0 \\ d(y_1) = & x_1^3 x_2 & d(z) = & y_1 y_2 x_1^4 x_2^2 - y_1 y_3 x_1^5 x_2 + y_2 y_3 x_1^6 + x_1^{15} + x_2^{12} \\ d(y_2) = & x_1^2 x_2^2 & d(z_v) = & x_v^3 + \sum_{[v,w]\in E} x_v x_w x_2^4 \end{array}$$

- A es contravariante (los morfismos hacen lo que se espera).

Un nuevo enfoque: el funtor *Graphs* $\rightsquigarrow$ *DGAs*

- ▷ Primero, nos restringimos a una subcategoría $Graph_{fm} \subset Graph$.
- ▷ Luego, construimos

$$A : Graph_{fm} \rightsquigarrow DGAs$$

$$(A_{\mathcal{G}}, d) = (\underbrace{\Lambda(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, z)}_{\text{Homotópicamente Rígida}} \otimes \underbrace{\Lambda(x_v, z_v | v \in V)}_{\text{Codifica } \mathcal{G}}, d)$$

- generadores en dimensiones: $|x_1| = 8, |x_2| = 10, |y_1| = 33, |y_2| = 35,$ $|y_3| = 37, |z| = 119, |x_v| = 40, |z_v| = 119,$
- diferenciales:

$$\begin{array}{llll} d(x_1) = & 0 & d(y_3) = & x_1 x_2^3 \\ d(x_2) = & 0 & d(x_v) = & 0 \\ d(y_1) = & x_1^3 x_2 & d(z) = & y_1 y_2 x_1^4 x_2^2 - y_1 y_3 x_1^5 x_2 + y_2 y_3 x_1^6 + x_1^{15} + x_2^{12} \\ d(y_2) = & x_1^2 x_2^2 & d(z_v) = & x_v^3 + \sum_{[v,w]\in E} x_v x_w x_2^4 \end{array}$$

- A es contravariante (los morfismos hacen lo que se espera).

El problema resuelto

Teorema (Costoya-V.)

Sea $\mathcal{G}$, $A_{\mathcal{G}}$ el funtor definido antes. Entonces:

El problema resuelto

Teorema (Costoya-V.)

Sea $\mathcal{G}$, $A_{\mathcal{G}}$ el funtor definido antes. Entonces:

- Existe una sucesión exacta corta y escindida

$$K \to \mathrm{Aut}(A_{\mathcal{G}}) \to \mathrm{Aut}(\mathcal{G})$$

  donde K es abeliano y libre de torsión.

El problema resuelto

Teorema (Costoya-V.)

Sea $\mathcal{G}$, $A_{\mathcal{G}}$ el funtor definido antes. Entonces:

- Existe una sucesión exacta corta y escindida

$$K \to \mathrm{Aut}(A_{\mathcal{G}}) \to \mathrm{Aut}(\mathcal{G})$$

  donde K es abeliano y libre de torsión.

- $A_{\mathcal{G}}$ es un álgebra elíptica (su cohomología es finita y posee dualidad de Poincaré) de dimensión formal $d = 208 + 80|V|$

El problema resuelto

Teorema (Costoya-V.)

Sea $\mathcal{G}$, $A_{\mathcal{G}}$ el funtor definido antes. Entonces:

- Existe una sucesión exacta corta y escindida

$$K \to \mathrm{Aut}(A_{\mathcal{G}}) \to \mathrm{Aut}(\mathcal{G})$$

  donde K es abeliano y libre de torsión.

- $A_{\mathcal{G}}$ es un álgebra elíptica (su cohomología es finita y posee dualidad de Poincaré) de dimensión formal $d = 208 + 80|V|$

- Sea $X_{\mathcal{G}}$ el espacio racional cuyo modelo minimal de Sullivan es $A_{\mathcal{G}}$. Entonces, el monoide de las clases de homotopía de endomorfismos de $X_{\mathcal{G}}$ es

$$[X_{\mathcal{G}}, X_{\mathcal{G}}] = \{f_0, f_1\} \cup \mathrm{Aut}(\mathcal{G})$$

El problema resuelto

Teorema (Costoya-V.)

Todo grupo finito G es realizable por número infinito de espacios racionales (no homotópicamente equivalentes entre si) X. Esto es, $G \cong \mathcal{E}(X)$.

El problema resuelto

Teorema (Costoya-V.)

Todo grupo finito G es realizable por número infinito de espacios racionales (no homotópicamente equivalentes entre si) X. Esto es, $G \cong \mathcal{E}(X)$.

(Kahn'90)

Before we get into specific categories of problems, let me say that there are two very broad problems - somewhat vague and general - that most workers agree are very important:

A. Calculate the groups $\mathcal{E}(X)$ explicitly in as many cases as possible, and express the known calculations in the most simple and concrete terms.

B. Develop applications of the group $\mathcal{E}(X)$ to other parts of topology (and mathematics in general).

1. Aplicaciones a la Topología

1. Aplicaciones a la Topología

(Félix-Murillo'97) $\quad \mathrm{nil}\mathcal{E}_\sharp(\mathrm{X})$

1. Aplicaciones a la Topología

(Félix-Murillo'97) $\quad \mathrm{nil}\mathcal{E}_\sharp(\mathrm{X}) \leq \mathrm{cat}(\mathrm{X}) - 1$

1. Aplicaciones a la Topología

(Félix-Murillo'97) $\quad \mathrm{nil}\mathcal{E}_\sharp(\mathrm{X}) \leq \mathrm{cat}(\mathrm{X}) - 1$

(Friedlander-Halperin'79) Si $(\Lambda V, d)$ es un modelo de Sullivan elíptico, entonces

$$dim V^{odd} \leq cat(\Lambda V, d)$$

1. Aplicaciones a la Topología

(Félix-Murillo'97) $\quad \mathrm{nil}\mathcal{E}_\sharp(\mathrm{X}) \leq \mathrm{cat}(\mathrm{X}) - 1$

(Friedlander-Halperin'79) Si $(\Lambda V, d)$ es un modelo de Sullivan elíptico, entonces

$$dimV^{odd} \leq cat(\Lambda V, d)$$

En nuestro caso

- $\mathcal{E}_\sharp(X_\mathcal{G}) = 1$

1. Aplicaciones a la Topología

(Félix-Murillo'97) $\mathrm{nil}\mathcal{E}_\sharp(\mathrm{X}) \leq \mathrm{cat}(\mathrm{X}) - 1$

(Friedlander-Halperin'79) Si $(\Lambda V, d)$ es un modelo de Sullivan elíptico, entonces

$$dimV^{odd} \leq cat(\Lambda V, d)$$

En nuestro caso

- $\mathcal{E}_\sharp(X_\mathcal{G}) = 1$
- $dimV^{odd}$ puede ser arbitrariamente grande

1. Aplicaciones a la Topología

(Félix-Murillo'97) $\mathrm{nil}\mathcal{E}_\sharp(\mathrm{X}) \leq \mathrm{cat}(\mathrm{X}) - 1$

(Friedlander-Halperin'79) Si $(\Lambda V, d)$ es un modelo de Sullivan elíptico, entonces

$$dimV^{odd} \leq cat(\Lambda V, d)$$

En nuestro caso

- $\mathcal{E}_\sharp(X_{\mathcal{G}}) = 1$
- $dimV^{odd}$ puede ser arbitrariamente grande

Por tanto, la desigualdad de arriba puede ser estricta y la diferencia entre sus términos tan grande como se desee.

2. Aplicaciones al Álgebra

2. Aplicaciones al Álgebra

Dada una categoría $\mathcal{C}$, el Problema de Isomorfía consiste en proporcionar un procedimiento que determine si dos objetos en $\mathcal{C}$ son isomorfos o no. Si existe tal procedimiento y éste requiere de técnicas relativas a cierta teoría $\mathcal{T}$, se dice que $\mathcal{T}$ distingue objetos en $\mathcal{C}$.

2. Aplicaciones al Álgebra

Dada una categoría $\mathcal{C}$, el Problema de Isomorfía consiste en proporcionar un procedimiento que determine si dos objetos en $\mathcal{C}$ son isomorfos o no. Si existe tal procedimiento y éste requiere de técnicas relativas a cierta teoría $\mathcal{T}$, se dice que $\mathcal{T}$ distingue objetos en $\mathcal{C}$.

Fijemos $\mathcal{C} = \mathit{Groups}$.

2. Aplicaciones al Álgebra

Dada una categoría $\mathcal{C}$, el Problema de Isomorfía consiste en proporcionar un procedimiento que determine si dos objetos en $\mathcal{C}$ son isomorfos o no. Si existe tal procedimiento y éste requiere de técnicas relativas a cierta teoría $\mathcal{T}$, se dice que $\mathcal{T}$ distingue objetos en $\mathcal{C}$.

Fijemos $\mathcal{C} = \mathit{Groups}$.

- Sea $\mathcal{T} =$ Teoría de Representación Clásica (acciones sobre espacios vectoriales)

2. Aplicaciones al Álgebra

Dada una categoría $\mathcal{C}$, el Problema de Isomorfía consiste en proporcionar un procedimiento que determine si dos objetos en $\mathcal{C}$ son isomorfos o no. Si existe tal procedimiento y éste requiere de técnicas relativas a cierta teoría $\mathcal{T}$, se dice que $\mathcal{T}$ distingue objetos en $\mathcal{C}$.

Fijemos $\mathcal{C} = \mathit{Groups}$.

- Sea $\mathcal{T}$ = Teoría de Representación Clásica (acciones sobre espacios vectoriales)

  (Hertweck, 2001) Existen G y H grupos finitos tales que $\mathbb{Z}[G] \cong \mathbb{Z}[H]$ (luego G y H actúan sobre los mismos espacios vectoriales) pero $G \ncong H$. Por tanto,

  ¡$\mathcal{T}$ no distingue grupos finitos!

2. Aplicaciones al Álgebra

Dada una categoría $\mathcal{C}$, el Problema de Isomorfía consiste en proporcionar un procedimiento que determine si dos objetos en $\mathcal{C}$ son isomorfos o no. Si existe tal procedimiento y éste requiere de técnicas relativas a cierta teoría $\mathcal{T}$, se dice que $\mathcal{T}$ distingue objetos en $\mathcal{C}$.

Fijemos $\mathcal{C} = Groups$.

- Sea $\mathcal{T}$ = Teoría de Representación Clásica (acciones sobre espacios vectoriales)

  (Hertweck, 2001) Existen G y H grupos finitos tales que $\mathbb{Z}[G] \cong \mathbb{Z}[H]$ (luego G y H actúan sobre los mismos espacios vectoriales) pero $G \ncong H$. Por tanto,

  ¡$\mathcal{T}$ no distingue grupos finitos!

- Sea $\mathcal{T}$ = Acciones fieles sobre DGA's racionales

2. Aplicaciones al Álgebra

Dada una categoría $\mathcal{C}$, el Problema de Isomorfía consiste en proporcionar un procedimiento que determine si dos objetos en $\mathcal{C}$ son isomorfos o no. Si existe tal procedimiento y éste requiere de técnicas relativas a cierta teoría $\mathcal{T}$, se dice que $\mathcal{T}$ distingue objetos en $\mathcal{C}$.

Fijemos $\mathcal{C} = \mathit{Groups}$.

- Sea $\mathcal{T}$ = Teoría de Representación Clásica (acciones sobre espacios vectoriales)

  (Hertweck, 2001) Existen G y H grupos finitos tales que $\mathbb{Z}[G] \cong \mathbb{Z}[H]$ (luego G y H actúan sobre los mismos espacios vectoriales) pero $G \ncong H$. Por tanto,

  ¡$\mathcal{T}$ no distingue grupos finitos!

- Sea $\mathcal{T}$ = Acciones fieles sobre DGA's racionales

  ¿Distingue $\mathcal{T}$ grupos finitos?

2. Aplicaciones al Álgebra

Teorema (Costoya-V.)

Dados G y H grupos en $\mathfrak{G}$, las siguientres afirmaciones son equivalentes:

- G y H so isomorfos.
- Para toda DGA racional, (A, d), $G \leq \operatorname{Aut}(A, d)$ si y sólo si $H \leq \operatorname{Aut}(A, d)$

2. Aplicaciones al Álgebra

Teorema (Costoya-V.)

Dados G y H grupos en $\mathfrak{G}$, las siguientres afirmaciones son equivalentes:

- G y H so isomorfos.
- Para toda DGA racional, (A, d), $G \leq \mathrm{Aut}(A, d)$ si y sólo si $H \leq \mathrm{Aut}(A, d)$

Definición (La clase $\mathfrak{G}$, ejemplos)

Un grupo $G \in \mathfrak{G}$ sii

2. Aplicaciones al Álgebra

Teorema (Costoya-V.)

Dados G y H grupos en $\mathfrak{G}$, las siguientres afirmaciones son equivalentes:

- G y H so isomorfos.
- Para toda DGA racional, (A, d), $G \leq \mathrm{Aut}(A, d)$ si y sólo si $H \leq \mathrm{Aut}(A, d)$

Definición (La clase $\mathfrak{G}$, ejemplos)

Un grupo $G \in \mathfrak{G}$ sii

$\triangleright$ Existe $\mathcal{G}$ un grafo localmente finito tal que $G \cong \mathrm{Aut}(\mathcal{G})$.

2. Aplicaciones al Álgebra

Teorema (Costoya-V.)

Dados G y H grupos en $\mathfrak{G}$, las siguientres afirmaciones son equivalentes:

- G y H so isomorfos.
- Para toda DGA racional, (A, d), $G \leq \mathrm{Aut}(A, d)$ si y sólo si $H \leq \mathrm{Aut}(A, d)$

Definición (La clase $\mathfrak{G}$, ejemplos)

Un grupo $G \in \mathfrak{G}$ sii

$\triangleright$ Existe $\mathcal{G}$ un grafo localmente finito tal que $G \cong \mathrm{Aut}(\mathcal{G})$.
$\triangleright$ G es co-Hopfiano.

2. Aplicaciones al Álgebra

Teorema (Costoya-V.)

Dados G y H grupos en $\mathfrak{G}$, las siguientres afirmaciones son equivalentes:

- G y H so isomorfos.
- Para toda DGA racional, (A, d), $G \leq \text{Aut}(A, d)$ si y sólo si $H \leq \text{Aut}(A, d)$

Definición (La clase $\mathfrak{G}$, ejemplos)

Un grupo $G \in \mathfrak{G}$ sii

▷ Existe $\mathcal{G}$ un grafo localmente finito tal que $G \cong \text{Aut}(\mathcal{G})$.
▷ G es co-Hopfiano.
▷ Todo subgrupo abeliano normal de G es de torsión.

2. Aplicaciones al Álgebra

Teorema (Costoya-V.)

Dados G y H grupos en $\mathfrak{G}$, las siguientres afirmaciones son equivalentes:

- G y H so isomorfos.
- Para toda DGA racional, (A, d), $G \leq \mathrm{Aut}(A, d)$ si y sólo si $H \leq \mathrm{Aut}(A, d)$

Definición (La clase $\mathfrak{G}$, ejemplos)

Un grupo $G \in \mathfrak{G}$ sii

▷ Existe $\mathcal{G}$ un grafo localmente finito tal que $G \cong \mathrm{Aut}(\mathcal{G})$.
▷ G es co-Hopfiano.
▷ Todo subgrupo abeliano normal de G es de torsión.

Ejemplos: Grupos finitos

2. Aplicaciones al Álgebra

Teorema (Costoya-V.)

Dados G y H grupos en $\mathfrak{G}$, las siguientres afirmaciones son equivalentes:

- G y H so isomorfos.
- Para toda DGA racional, (A, d), $G \leq \mathrm{Aut}(A, d)$ si y sólo si $H \leq \mathrm{Aut}(A, d)$

Definición (La clase $\mathfrak{G}$, ejemplos)

Un grupo $G \in \mathfrak{G}$ sii

▷ Existe $\mathcal{G}$ un grafo localmente finito tal que $G \cong \mathrm{Aut}(\mathcal{G})$.
▷ G es co-Hopfiano.
▷ Todo subgrupo abeliano normal de G es de torsión.

Ejemplos: Grupos finitos, grupos simples numerables (eg. el Monstruo de Tarski)

2. Aplicaciones al Álgebra

Teorema (Costoya-V.)

Dados G y H grupos en $\mathfrak{G}$, las siguientres afirmaciones son equivalentes:

- G y H so isomorfos.
- Para toda DGA racional, (A, d), $G \leq \operatorname{Aut}(A, d)$ si y sólo si $H \leq \operatorname{Aut}(A, d)$

Definición (La clase $\mathfrak{G}$, ejemplos)

Un grupo $G \in \mathfrak{G}$ sii

▷ Existe $\mathcal{G}$ un grafo localmente finito tal que $G \cong \operatorname{Aut}(\mathcal{G})$.
▷ G es co-Hopfiano.
▷ Todo subgrupo abeliano normal de G es de torsión.

Ejemplos: Grupos finitos, grupos simples numerables (eg. el Monstruo de Tarski), grupos artinianos resolubles (eg. grupo de Prüfer)

2. Aplicaciones al Álgebra

Teorema (Costoya-V.)

Dados G y H grupos en $\mathfrak{G}$, las siguientres afirmaciones son equivalentes:

- G y H so isomorfos.
- Para toda DGA racional, (A, d), $G \leq \mathrm{Aut}(A, d)$ si y sólo si $H \leq \mathrm{Aut}(A, d)$

Definición (La clase $\mathfrak{G}$, ejemplos)

Un grupo $G \in \mathfrak{G}$ sii

▷ Existe $\mathcal{G}$ un grafo localmente finito tal que $G \cong \mathrm{Aut}(\mathcal{G})$.
▷ G es co-Hopfiano.
▷ Todo subgrupo abeliano normal de G es de torsión.

Ejemplos: Grupos finitos, grupos simples numerables (eg. el Monstruo de Tarski), grupos artinianos resolubles (eg. grupo de Prüfer), Mapping class groups de ciertas superficies compactas orientables.

2. Aplicaciones al Álgebra

Demostración:

$\Rightarrow$ Trivial

2. Aplicaciones al Álgebra

Demostración:

$\Rightarrow$ Trivial

$\Leftarrow$ Suppose $G \leq \mathrm{Aut}(A, d) \Leftrightarrow H \leq \mathrm{Aut}(A, d)$. Then

2. Aplicaciones al Álgebra

Demostración:

$\Rightarrow$ Trivial

$\Leftarrow$ Suppose $G \leq \mathrm{Aut}(A, d) \Leftrightarrow H \leq \mathrm{Aut}(A, d)$. Then

Step 1. Existe un grafo localmente finito $\mathcal{G}$ tal que $\mathrm{Aut}(\mathcal{G}) \cong G$

2. Aplicaciones al Álgebra

Demostración:

$\Rightarrow$ Trivial

$\Leftarrow$ Suppose $G \leq \mathrm{Aut}(A,d) \Leftrightarrow H \leq \mathrm{Aut}(A,d)$. Then

Step 1. Existe un grafo localmente finito $\mathcal{G}$ tal que $\mathrm{Aut}(\mathcal{G}) \cong G$

Step 2. Existe una DGA $(A_{\mathcal{G}}, d)$ asociada a $\mathcal{G}$

Step 3. Tenemos una sucesión exacta corta

$$K_1 \longrightarrow \mathrm{Aut}(A_{\mathcal{G}}, d) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathcal{G}) \cong G$$

2. Aplicaciones al Álgebra

Demostración:

$\Rightarrow$ Trivial

$\Leftarrow$ Suppose $G \leq \mathrm{Aut}(A, d) \Leftrightarrow H \leq \mathrm{Aut}(A, d)$. Then

Step 1. Existe un grafo localmente finito $\mathcal{G}$ tal que $\mathrm{Aut}(\mathcal{G}) \cong G$

Step 2. Existe una DGA $(A_{\mathcal{G}}, d)$ asociada a $\mathcal{G}$

Step 3. Tenemos una sucesión exacta corta

$$K_1 \longrightarrow \mathrm{Aut}(A_{\mathcal{G}}, d) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathcal{G}) \cong G$$

con K_1 abeliano y libre de torsión.

2. Aplicaciones al Álgebra

Demostración:

$\Rightarrow$ Trivial

$\Leftarrow$ Suppose $G \leq \mathrm{Aut}(A, d) \Leftrightarrow H \leq \mathrm{Aut}(A, d)$. Then

Step 1. Existe un grafo localmente finito $\mathcal{G}$ tal que $\mathrm{Aut}(\mathcal{G}) \cong G$

Step 2. Existe una DGA $(A_{\mathcal{G}}, d)$ asociada a $\mathcal{G}$

Step 3. Tenemos una sucesión exacta corta

$$K_1 \longrightarrow \mathrm{Aut}(A_{\mathcal{G}}, d) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathcal{G}) \cong G$$

con K_1 abeliano y libre de torsión.

Step 4. Ahora, $G \leq \mathrm{Aut}(A_{\mathcal{G}}, d)$ y por hipótesis $H \leq \mathrm{Aut}(A_{\mathcal{G}}, d)$.

2. Aplicaciones al Álgebra

Demostración:

$\Rightarrow$ Trivial

$\Leftarrow$ Suppose $G \leq \text{Aut}(A, d) \Leftrightarrow H \leq \text{Aut}(A, d)$. Then

Step 1. Existe un grafo localmente finito $\mathcal{G}$ tal que $\text{Aut}(\mathcal{G}) \cong G$

Step 2. Existe una DGA $(A_{\mathcal{G}}, d)$ asociada a $\mathcal{G}$

Step 3. Tenemos una sucesión exacta corta

$$K_1 \longrightarrow \text{Aut}(A_{\mathcal{G}}, d) \longrightarrow \text{Aut}(\mathcal{G}) \cong G$$

con K_1 abeliano y libre de torsión.

Step 4. Ahora, $G \leq \text{Aut}(A_{\mathcal{G}}, d)$ y por hipótesis $H \leq \text{Aut}(A_{\mathcal{G}}, d)$. Como $K_1 \cap H$ es un subgrupo normal y abeliano de $H \in \mathfrak{G}$, tiene que ser de torsión. Pero K_1 es libre de torsión, y por tanto $K_1 \cap H = 0$.

2. Aplicaciones al Álgebra

Demostración:

$\Rightarrow$ Trivial

$\Leftarrow$ Suppose $G \leq \text{Aut}(A, d) \Leftrightarrow H \leq \text{Aut}(A, d)$. Then

Step 1. Existe un grafo localmente finito $\mathcal{G}$ tal que $\text{Aut}(\mathcal{G}) \cong G$

Step 2. Existe una DGA $(A_{\mathcal{G}}, d)$ asociada a $\mathcal{G}$

Step 3. Tenemos una sucesión exacta corta

$$K_1 \longrightarrow \text{Aut}(A_{\mathcal{G}}, d) \longrightarrow \text{Aut}(\mathcal{G}) \cong G$$

con K_1 abeliano y libre de torsión.

Step 4. Ahora, $G \leq \text{Aut}(A_{\mathcal{G}}, d)$ y por hipótesis $H \leq \text{Aut}(A_{\mathcal{G}}, d)$. Como $K_1 \cap H$ es un subgrupo normal y abeliano de $H \in \mathfrak{G}$, tiene que ser de torsión. Pero K_1 es libre de torsión, y por tanto $K_1 \cap H = 0$. Luego $H \leq G$.

2. Aplicaciones al Álgebra

Demostración:

$\Rightarrow$ Trivial

$\Leftarrow$ Suppose $G \leq \mathrm{Aut}(A,d) \Leftrightarrow H \leq \mathrm{Aut}(A,d)$. Then

Step 1. Existe un grafo localmente finito $\mathcal{G}$ tal que $\mathrm{Aut}(\mathcal{G}) \cong G$

Step 2. Existe una DGA $(A_{\mathcal{G}}, d)$ asociada a $\mathcal{G}$

Step 3. Tenemos una sucesión exacta corta

$$K_1 \longrightarrow \mathrm{Aut}(A_{\mathcal{G}}, d) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathcal{G}) \cong G$$

con K_1 abeliano y libre de torsión.

Step 4. Ahora, $G \leq \mathrm{Aut}(A_{\mathcal{G}}, d)$ y por hipótesis $H \leq \mathrm{Aut}(A_{\mathcal{G}}, d)$. Como $K_1 \cap H$ es un subgrupo normal y abeliano de $H \in \mathfrak{G}$, tiene que ser de torsión. Pero K_1 es libre de torsión, y por tanto $K_1 \cap H = 0$. Luego $H \leq G$.
Step 5. Razonando de igual manera $G \leq H$, lo que da lugar a una serie de inclusiones $G \leq H \leq G$.

2. Aplicaciones al Álgebra

Demostración:

$\Rightarrow$ Trivial

$\Leftarrow$ Suppose $G \leq \operatorname{Aut}(A, d) \Leftrightarrow H \leq \operatorname{Aut}(A, d)$. Then

Step 1. Existe un grafo localmente finito $\mathcal{G}$ tal que $\operatorname{Aut}(\mathcal{G}) \cong G$

Step 2. Existe una DGA $(A_{\mathcal{G}}, d)$ asociada a $\mathcal{G}$

Step 3. Tenemos una sucesión exacta corta

$$K_1 \longrightarrow \operatorname{Aut}(A_{\mathcal{G}}, d) \longrightarrow \operatorname{Aut}(\mathcal{G}) \cong G$$

con K_1 abeliano y libre de torsión.

Step 4. Ahora, $G \leq \operatorname{Aut}(A_{\mathcal{G}}, d)$ y por hipótesis $H \leq \operatorname{Aut}(A_{\mathcal{G}}, d)$. Como $K_1 \cap H$ es un subgrupo normal y abeliano de $H \in \mathfrak{G}$, tiene que ser de torsión. Pero K_1 es libre de torsión, y por tanto $K_1 \cap H = 0$. Luego $H \leq G$.
Step 5. Razonando de igual manera $G \leq H$, lo que da lugar a una serie de inclusiones $G \leq H \leq G$. Como G cohopfiano, $H \cong G$. $\square$

3. Aplicaciones a la Geometría Diferencial

Idea (Crowley-Loh, 2011)

Los teoremas sobre el grado de aplicaciones "à la Gromov" están fuertemente relacionados con la existencia de variedades inflexibles

3. Aplicaciones a la Geometría Diferencial

Idea (Crowley-Loh, 2011)

Los teoremas sobre el grado de aplicaciones "à la Gromov" están fuertemente relacionados con la existencia de variedades inflexibles

Definición (variedad inflexible)

Una variedad diferenciable cerrada y orientable M se dice inflexible si

$$\{\deg f \mid f : M \to M \text{ continuous}\} \subset \{-1, 0, 1\}$$

3. Aplicaciones a la Geometría Diferencial

Idea (Crowley-Loh, 2011)

Los teoremas sobre el grado de aplicaciones "à la Gromov" están fuertemente relacionados con la existencia de variedades inflexibles

Definición (variedad inflexible)

Una variedad diferenciable cerrada y orientable M se dice inflexible si

$$\{\deg f \mid f : M \to M \text{ continuous}\} \subset \{-1, 0, 1\}$$

Usando métodos de homotopía racional, sabemos que existen variedades inflexibles de dimensiones $64 \cup \{d \cdot k \mid k \in \mathbb{N}, d = 108, 208, 228\}$ ($\equiv 0$ (mód 4)).

3. Aplicaciones a la Geometría Diferencial

Recordemos que

- $X_{\mathcal{G}}$ es un espacio elíptico con dimensión formal $d = 208 + 80|V|$ such that
$$[X_{\mathcal{G}}, X_{\mathcal{G}}] = \{f_0, f_1\} \cup \mathrm{Aut}(\mathcal{G})$$

3. Aplicaciones a la Geometría Diferencial

Recordemos que

- $X_{\mathcal{G}}$ es un espacio elíptico con dimensión formal $d = 208 + 80|V|$ such that
$$[X_{\mathcal{G}}, X_{\mathcal{G}}] = \{f_0, f_1\} \cup \mathrm{Aut}(\mathcal{G})$$

- Por tanto, si $X_{\mathcal{G}}$ fuese la racionalización de una variedad M, entonces M sería inflexible

3. Aplicaciones a la Geometría Diferencial

Recordemos que

- $X_{\mathcal{G}}$ es un espacio elíptico con dimensión formal $d = 208 + 80|V|$ such that
$$[X_{\mathcal{G}}, X_{\mathcal{G}}] = \{f_0, f_1\} \cup \mathrm{Aut}(\mathcal{G})$$

- Por tanto, si $X_{\mathcal{G}}$ fuese la racionalización de una variedad M, entonces M sería inflexible

Pero $d \equiv 0 \pmod 4$ y en esas dimensiones el cálculo de la obstrucción a obtener una variedad (Barge-Sullivan) es muy complicada.

3. Aplicaciones a la Geometría Diferencial

Recordemos que

- $X_{\mathcal{G}}$ es un espacio elíptico con dimensión formal $d = 208 + 80|V|$ such that
$$[X_{\mathcal{G}}, X_{\mathcal{G}}] = \{f_0, f_1\} \cup \mathrm{Aut}(\mathcal{G})$$

- Por tanto, si $X_{\mathcal{G}}$ fuese la racionalización de una variedad M, entonces M sería inflexible

Pero $d \equiv 0 \pmod 4$ y en esas dimensiones el cálculo de la obstrucción a obtener una variedad (Barge-Sullivan) es muy complicada.

Modificando nuestra construcción obtenemos ... . . .

3. Aplicaciones a la Geometría Diferencial

Teorema (Costoya-V.)

Para cualquier grafo conexo y finito $\mathcal{G}$, existe $\widetilde{A}_{\mathcal{G}}, \widetilde{X}_{\mathcal{G}}$ tal que:

3. Aplicaciones a la Geometría Diferencial

Teorema (Costoya-V.)

Para cualquier grafo conexo y finito $\mathcal{G}$, existe $\widetilde{A}_{\mathcal{G}}, \widetilde{X}_{\mathcal{G}}$ tal que:

- $\widetilde{A}_{\mathcal{G}}$ es una DGA elíptica de dimensión formal$d = 2(208 + 80|V|) - 1$. Como $d \equiv 3 \pmod 4$, $\widetilde{X}_{\mathcal{G}}$ es la racionalización de una d-variedad $M_{\mathcal{G}}$.

3. Aplicaciones a la Geometría Diferencial

Teorema (Costoya-V.)

Para cualquier grafo conexo y finito $\mathcal{G}$, existe $\widetilde{A}_{\mathcal{G}}, \widetilde{X}_{\mathcal{G}}$ tal que:

- $\widetilde{A}_{\mathcal{G}}$ es una DGA elíptica de dimensión formal$d = 2(208 + 80|V|) - 1$. Como $d \equiv 3 \pmod{4}$, $\widetilde{X}_{\mathcal{G}}$ es la racionalización de una d-variedad $M_{\mathcal{G}}$.
- El monoide de endomorfismos $[\widetilde{X}_{\mathcal{G}}, \widetilde{X}_{\mathcal{G}}] \cong \{f_0, f_1\} \cup \mathrm{Aut}(\mathcal{G})$. Por tanto $M_{\mathcal{G}}$ es inflexible.

3. Aplicaciones a la Geometría Diferencial

Teorema (Costoya-V.)

Para cualquier grafo conexo y finito $\mathcal{G}$, existe $\widetilde{A}_{\mathcal{G}}, \widetilde{X}_{\mathcal{G}}$ tal que:

- $\widetilde{A}_{\mathcal{G}}$ es una DGA elíptica de dimensión formal$d = 2(208 + 80|V|) - 1$. Como $d \equiv 3 \pmod 4$, $\widetilde{X}_{\mathcal{G}}$ es la racionalización de una d-variedad $M_{\mathcal{G}}$.
- El monoide de endomorfismos $[\widetilde{X}_{\mathcal{G}}, \widetilde{X}_{\mathcal{G}}] \cong \{f_0, f_1\} \cup \mathrm{Aut}(\mathcal{G})$. Por tanto $M_{\mathcal{G}}$ es inflexible.

Teorema (Costoya-V.)

Para todo grupo finito G, existe una variedad inflexible M_G tal que

$$\mathcal{E}((M_G)_{\mathbb{Q}}) \cong G$$

3. Aplicaciones a la Geometría Diferencial

Teorema (Costoya-V.)

Para cualquier grafo conexo y finito $\mathcal{G}$, existe $\widetilde{A}_{\mathcal{G}}, \widetilde{X}_{\mathcal{G}}$ tal que:

- $\widetilde{A}_{\mathcal{G}}$ es una DGA elíptica de dimensión formal $d = 2(208 + 80|V|) - 1$. Como $d \equiv 3 \pmod 4$, $\widetilde{X}_{\mathcal{G}}$ es la racionalización de una d-variedad $M_{\mathcal{G}}$.
- El monoide de endomorfismos $[\widetilde{X}_{\mathcal{G}}, \widetilde{X}_{\mathcal{G}}] \cong \{f_0, f_1\} \cup \mathrm{Aut}(\mathcal{G})$. Por tanto $M_{\mathcal{G}}$ es inflexible.

Teorema (Costoya-V.)

Para todo grupo finito G, existe una variedad inflexible M_G tal que

$$\mathcal{E}((M_G)_{\mathbb{Q}}) \cong G$$

¡Muchas gracias!