

Programación lineal, método del símplex y Conjetura de Hirsch

Francisco Santos Leal¹

Resumen

La Conjetura de Hirsch, enunciada en 1957, es la siguiente afirmación:

Para ir de un vértice a otro en un poliedro de dimensión d con n *facetas* (caras de dimensión $d-1$) nunca es necesario recorrer más de $n-d$ aristas.

Por ejemplo, en un cubo de dimensión tres (que tiene 6 facetas) se puede ir de cualquier vértice a cualquier otro atravesando a lo más tres aristas. A pesar del optimismo inicial, el trabajo de W. Klee y otros en los años 60 y 70 dejó entrever que la conjetura podría ser falsa. Pero la existencia de contraejemplos (en poliedros acotados) no fue establecida hasta que el autor de esta conferencia encontró uno, en 2010.

Además de su interés en combinatoria geométrica, la Conjetura de Hirsch es importante en el contexto del *Método Símplex* para *Programación Lineal*. La Programación Lineal es el problema de optimización matemática que con más frecuencia aparece en la industria y la economía, pues sirve para buscar estrategias óptimas de gestión de recursos, planificación de inversiones, organización logística de pedidos y entregas, etc. en todo tipo de problemas en los que interviene un gran número de variables.

El Método Símplex (o *del símplex*) es el algoritmo más antiguo, conceptualmente más sencillo, y más usado para resolver los problemas de programación lineal. Entendido geoméricamente, el algoritmo interpreta el espacio de soluciones factibles como un poliedro y busca la solución óptima (que siempre será un vértice) viajando por las aristas del poliedro de manera monótona (esto es, intentando aumentar en cada paso el valor de una cierta función objetivo). La conjetura de Hirsch está relacionada con el número de pasos que esperamos que el método del símplex deba dar en el caso peor, es decir, con la complejidad computacional del método.

En esta conferencia, además de describir los contraejemplos a la conjetura de Hirsch y su construcción, repasaremos las conexiones de ésta con el método del símplex, así como la situación actual sobre la complejidad del método del símplex y de la programación lineal.

[1] F. Santos, *Sobre un contraejemplo a la Conjetura de Hirsch*, Gac. R. Soc. Mat. Esp. **13** (2010), no. 3, 525–538.

[2] ———, *A counter-example to the Hirsch conjecture*, Annals Math. (2) **176** (2012), 383–412.

¹Depto. de Matemáticas, Estadística y Computación

Facultad de Ciencias, Universidad de Cantabria

Av. de los Castros 48, 39005 Santander

francisco.santos@unican.es, <http://personales.unican.es/santosf>