Dualidad en grupos topológicos

XIX Encuentro de Topología

La Coruña, 19-20 octubre, 2012

M. J. Chasco, Universidad de Navarra

Esquema

1. Grupos topológicos abelianos Hausdorff
2. Dualidad de Pontryagin. Resultados básicos
3. Líneas de trabajo y cuestiones abiertas
4. Algunos resultados recientes
5. Bibliografía

La noción de grupo topológico

Grupo topológico: Grupo G con una topología τ donde

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \longrightarrow & G \\ (g,h) & \longmapsto & g+h \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ g & \longmapsto & -g \end{array}$$

son continuas.

Consideraremos grupos topológicos abelianos Hausdorff.

Todo grupo topológico

- Es un espacio homogéneo y admite una uniformidad natural.
- $\mathcal{N}_G(0)$ (base local de entornos de 0) determina $\mathcal{N}_G(g)$
- Cada punto admite una base local de entornos cerrados simétricos
- Es completamente regular

Todo grupo topológico

- Es 1° numerable si y solo si es metrizable
- Todo subgrupo abierto es cerrado
- Todo subgrupo discreto es cerrado
- H es subgrupo cerrado si y solo si G/H es Hausdorff
- $p : G \to G/H$ es continua y abierta
- Los homomorfismos continuos entre grupos topológicos son uniformemente continuos

Ejemplos

- Cualquier grupo con la topología discreta
- $(\mathbb{R}^n, +)$ con la topología euclídea
- $(\mathbb{Z}, +)$ como subgrupo de $\mathbb{R}$
- $(\mathbb{Q}, +)$ como subgrupo de $\mathbb{R}$
- $\mathbb{T} := \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$
- Cualquier espacio vectorial topológico como grupo aditivo
- Cualquier grupo de Lie
- El grupo $\mathbb{Q}_p$ de los números p-ádicos
- El anillo de los adeles $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}} := \mathbb{R} \times \prod'_p \mathbb{Q}_p$, donde $\prod'_p \mathbb{Q}_p$ es el producto restringido a los enteros p-ádicos $\mathbb{Z}_p$, y p primo.

El grupo dual

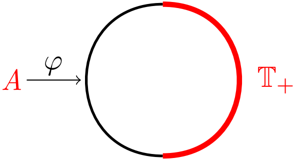
Sea G grupo topológico.

- $\mathbb{T}_+ = \{t \in \mathbb{T} : \mathrm{Re}(t) \geq 0\}$ determina la topología de $\mathbb{T}$:
  Los conjuntos $(\mathbb{T}_+)_n = \{t \in \mathbb{T} : t, t^2, \dots t^n \in \mathbb{T}_+\}$
  base local de entornos de 1
- Un homomorfismo $\varphi : G \to \mathbb{T}$ es continuo si $\varphi^{-1}(\mathbb{T}_+) \in \mathcal{N}_G(0)$
- Un carácter de G es un homomorfismo continuo $\varphi : G \to \mathbb{T}$.
- El grupo dual $G^\wedge$ es el grupo de todos los caracteres de G.
- Multiplicación en $G^\wedge$:
  $(\psi_1\psi_2)(x) = \psi_1(x)\psi_2(x)$ para todos ψ_1, ψ_2 en $G^\wedge$, x_1, x_2 en G
- $G^\wedge$ se dota de la topología compacto abierta

Polares y anuladores

$A \subset G$

- $A^{\triangleright} := \{\varphi \in G^{\wedge} : \varphi(A) \subset \mathbb{T}_+\}$.
- Si $A \leq G$, $A^{\perp} := A^{\triangleright} = \{\varphi \in G^{\wedge} : \varphi(A) = \{1\}\}$



El grupo dual

- $E \subset G^{\wedge}$ es equicontinuo si existe $U \in \mathcal{N}_G(0)$, tal que $E \subset U^{\triangleright}$.
- $U \in \mathcal{N}_G(0) \Rightarrow U^{\triangleright}$ es compacto en $G^{\wedge}$
- $\{K^{\triangleright}\}_{K \text{ compacto de } G}$ es base de entornos de 1 para la topología compacto abierta

Grupos duales

- G compacto $\Rightarrow G^{\wedge}$ discreto $(G^{\triangleright} = \{1\} \in \mathcal{N}_{G^{\wedge}}(1))$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{T}^{\wedge} \\ n & \longmapsto & (\varphi_n : t \longmapsto t^n) \end{array}$$

$$\mathbb{Z}(p^{\infty}) \longrightarrow \mathbb{Z}_p^{\wedge}$$

- G discreto $\Rightarrow G^{\wedge}$ compacto $(\{0\}^{\triangleright} = G^{\wedge}$ es compacto$)$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T} & \longrightarrow & \mathbb{Z}^{\wedge} \\ t & \longmapsto & (\varphi_t : n \longmapsto t^n) \end{array}$$

$$\mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{Z}(p^{\infty})^{\wedge}$$

Grupos duales

- G localmente compacto LCA $\Rightarrow G^\wedge$ LCA

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^\wedge \\ x & \longmapsto & (\varphi_x : y \longmapsto e^{2\pi i x y}) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Q}_p & \longrightarrow & \mathbb{Q}_p^\wedge \\ x & \longmapsto & (\varphi_x : y \longmapsto e^{2\pi i \{xy\}_p}) \end{array}$$

Del grupo al dual

- G conexo $\Rightarrow G^\wedge$ libre de torsión

  (Para todo $\varphi \in G^\wedge \setminus \{1\}$, $\varphi(G) = \mathbb{T}$)

- G hemicompacto $\Rightarrow G^\wedge$ metrizable

  (Existe familia numerable de compactos (K_n) en G tal que $(K_n^\triangleright)$ base de entornos de 1 en $G^\wedge$)

- G k-espacio $\Rightarrow G^\wedge$ completo y su componente arcoconexa es divisible

  El espacio $C(G, \mathbb{T})$ de funciones continuas es completo en la topología compacto abierta y $G^\wedge$ es cerrado en $C(G, \mathbb{T})$.

  La componente arcoconexa de $G^\wedge$ es la unión de los subgrupos uniparamétricos (Nickolas, 1977).

- G metrizable $\Rightarrow G^\wedge$ es hemicompacto y k-espacio,

  (Ch, Außenhofer 1998-1999)

  $\{U^\triangleright\}_{U\in\mathcal{N}_G(0)}$ cobase de compactos en $G^\wedge$;

  $G^\wedge$ k-espacio:

  (a) Para cualquier G, en los conjuntos equicontinuos de $G^\wedge$ la topología compacto abierta coincide con la de la convergencia puntual.

  (b) Si G es metrizable, la topología más fina en $G^\wedge$ que coincide en los equicontinuos con la topología de la convergencia puntual es la compacto abierta.

  (c) Con esta topología, $G^\wedge$ es k-espacio.

Dualidad de Pontryagin-van Kampen

- El grupo bidual $G^{\wedge\wedge}$ lleva también la topología compacto abierta (determinada por los compactos de $G^{\wedge}$)
- El homomorfismo canónico α_G se define como

$$\begin{array}{rcl} \alpha_G : G & \longrightarrow & G^{\wedge\wedge} \\ x & \longmapsto & \alpha_G(x) : \varphi \longmapsto \varphi(x) \end{array}$$

  para todo $\varphi \in G^{\wedge}$ y $x \in G$
- Si α_G es isomorfismo topológico de G en $G^{\wedge\wedge}$, entonces G se dice (Pontryagin) reflexivo
- $\mathbb{Q}$ no es reflexivo: $\mathbb{Q}^{\wedge} \cong \mathbb{R}$ y $\mathbb{Q}^{\wedge\wedge} \cong \mathbb{R}$

Dualidad de Pontryagin-van Kampen

- Teorema. (Pontryagin-van Kampen, 1934–1935)
  Todo grupo topológico (LCA) es reflexivo.
- Además, si H es subgrupo cerrado de G, los homomorfismos

$$\varphi : (G/H)^\wedge \to H^\perp, \quad \psi : G^\wedge/H^\perp \to H^\wedge$$

son isomorfismos topológicos.

- Fuera de los LCA, un subgrupo cerrado de un grupo reflexivo no tiene por qué ser reflexivo:
  Sea $H := L^2_{\mathbb{Z}}[0,1]$ el grupo de las funciones cuadrado integrables, con valores enteros salvo en un conjunto de medida nula. Se trata de un subgrupo cerrado de $L^2([0,1])$ cuyo bidual es $H^{\wedge\wedge} = L^2([0,1])$ (Außenhofer, 1999).
- Sin embargo, los subgrupos abiertos contienen toda la información sobre la reflexividad del grupo
- Teorema. Sea A subgrupo abierto de un grupo topológico G, A es reflexivo $\Leftrightarrow$ G es reflexivo (Banaszczyk, Ch, Martín-Peinador, 1994)

Primera extensión del Teorema de Pontryagin-van Kampen

Kaplan, 1948

- Si $\{G_j\}_{j\in J}$ son reflexivos, el producto es reflexivo

  Además

  $$\begin{array}{ccc} \left(\prod G_j\right)^\wedge \longrightarrow \left(\bigoplus G_j^\wedge,\, \tau_*\right) & \qquad & \left(\bigoplus G_j,\, \tau_*\right)^\wedge \longrightarrow \prod G_j^\wedge \\ \phi \longmapsto (\phi\circ i_j)_{j\in J} & & \phi \longmapsto (\phi\circ i_j)_{j\in J} \end{array}$$

  son isomorfismos topológicos.

- La topología τ_* no coincide en general con la topología coproducto.

  El coproducto no siempre es reflexivo. (El coproducto de una familia de grupos LCA es reflexivo $\Leftrightarrow$ todos salvo una cantidad numerable son discretos. Nickolas 2002)

Productos restringidos

- Teorema. Sea $(G_i)_{i\in I}$ una familia de grupos LCA y $H_i \leq G_i$ abierto compacto $\forall i \in I$. Entonces
  $(\prod'_{i\in I} G_i)^\wedge \cong \prod'_{i\in I} G_i^\wedge$
  siendo $\prod'_{i\in I} G_i$ el producto restringido a $(H_i)_{i\in I}$ y $\prod'_{i\in I} G_i^\wedge$ restringido a los anuladores $(H_i^\perp)_{i\in I}$.
- Si $\mathbb{A}_\mathbb{Q} := \mathbb{R} \times \prod'_p \mathbb{Q}_p$, donde $\prod'_p \mathbb{Q}_p$ es el producto restringido a los enteros p-ádicos $\mathbb{Z}_p$, y p primo:
  $\mathbb{Q}_p \cong \mathbb{Q}_p^\wedge$ y $\mathbb{Z}_p^\perp = \mathbb{Z}_p$. Por tanto $\mathbb{A}_\mathbb{Q}^\wedge \cong \mathbb{A}_\mathbb{Q}$

Espacios vectoriales topológicos

Smith, 1952

- Los espacios localmente convexos reflexivos, como grupos aditivos, son Pontryagin reflexivos,
- Los espacios de Banach, como grupos aditivos, son Pontryagin reflexivos,
- Si E es espacio localmente convexo, $E^{\wedge}$ y E^* (formas lineales continuas) son (algebraicamente) isomorfos

$$E^* \longrightarrow E^{\wedge}$$
$$f \longmapsto e^{2\pi i f}$$

- Los espacios vectoriales localmente convexos metrizables completos son Pontryagin reflexivos (Banaszczyk, 1990)

Líneas de trabajo en dualidad de grupos topológicos

- Caracterizaciones de la reflexividad
- Caracterización de grupos LCA autoduales
- Clases de grupos donde la reflexividad se herede para subgrupos cerrados y cociente Hausdorff
- Grupos abstractos que admiten una topología de grupo no discreta y reflexiva (Si G es un grupo numerable infinito, G admite una topología reflexiva no discreta $\Leftrightarrow$ G tiene exponente infinito, Außenhofer, Gabriyelyan 2012)
- Reflexividad de $C(X)$, $C_p(X)$, $C(X, T)$, de $A(X)$
- Estudiar topologías compatibles con la dualidad (topología de Mackey para grupos topológicos)
- Dualidad para grupos no abelianos

Completitud y reflexividad

- Teorema (Komura, 1984) Existen espacios vectoriales topológicos no completos reflexivos.
  (El ejemplo de Komura es un espacio localmente convexo nuclear no metrizable)
- Teorema (Ch, Außenhofer, 1998-1999) Todo grupo metrizable reflexivo es completo y todo subgrupo denso de un metrizable da lugar al mismo dual algebraico y topológico que el grupo (por tanto no puede ser reflexivo si el grupo lo es)
- Teorema (Hernández, Macario, Trigos, 2008) Si G es compacto y todos los subgrupos densos de G lo determinan (dan lugar al mismo dual), entonces G es metrizable

Grupos precompactos reflexivos

- Corolario Todo grupo metrizable reflexivo precompacto (subgrupo de un grupo compacto) es compacto.
- ¿Es todo grupo precompacto reflexivo compacto? (aunque no sea metrizable)
- Si G es precompacto, α_G es homomorfismo inyectivo y abierto.
- Para un grupo sin compactos infinitos α_G es sobreyectiva
- Un grupo precompacto G sin compactos infinitos es reflexivo si y sólo si α_G es continua

Grupos pseudocompactos reflexivos

- Un espacio X es pseudocompacto si cualquier función continua definida en X con valores en $\mathbb{R}$ es acotada
- G pseudocompacto $\Rightarrow$ G precompacto (Confort-Ross, 1966)
- Si G es pseudocompacto, α_G es continua (Hernández, Macario, 2003)
- Teorema Todo grupo pseudocompacto sin subconjuntos compactos infinitos es Pontryagin reflexivo (Ardanza, Ch, Domínguez, Galindo, Macario, Tkachenko, 2010)
- Lema El grupo $\mathbb{Z}_2^c$ contiene un subgrupo denso pseudocompacto sin subconjuntos compactos infinitos (Tkachenko, 1988)
- Teorema Todo grupo pseudocompacto es cociente Hausdorff de un grupo pseudocompacto sin compactos infinitos (Dikranjan, Tkachenko 2000).

Bibliografía I

Ardanza-Trevijano, S., Chasco, M. J., Domínguez, X. and Tkachenko, M., *Precompact noncompact reflexive abelian grups*, Forum Math. 24 (2012), no. 2, 289–302.

Außenhofer, L., *Contributions to the Duality Theory of Abelian Topological Groups and to the Theory of Nuclear Groups*, Dissertationes Math. CCCLXXXIV, Warszawa, 1999.

Außenhofer, L. and Gabriyelyan, S. S., *On reflexive group topologies on abelian groups of finite exponent.* Preprint.

Banaszczyk, W., *Additive Subgroups of Topological Vector Spaces*, Lecture Notes in Mathematics 1466. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York, 1991.

Bibliografía II

- Banaszczyk, W., Chasco, M. J. and Martín-Peinador, E., *Open subgroups and Pontryagin duality*, Math. Z. 215 (1994), no. 2, 195–204.
- Chasco, M. J., *Pontryagin duality for metrizable groups*, Arch. Math. (Basel) 70 (1998), no. 1, 22–28.
- Comfort, W. W. and Ross, K. A., *Pseudocompactness and uniform continuity in topological groups*, Pacific J. Math. 16 (1966) 483–496.
- Galindo, J. and Macario, S., *Pseudocompact group topologies with no infinite compact subsets*, J. of Pure Appl. Algebra 215 (2011), no. 4, 655-663.

Bibliografía III

- Hernández, S. and Macario, S., *Dual properties in totally bounded Abelian groups*, Arch. Math. (Basel) 80 (2003) 271–283.
- Kaplan, S., *Extensions of the Pontrjagin duality I: Infinite products*, Duke Math. J. 15 (1948), 649-658.
- Nickolas, P., *Reflexivity of topological groups*, Proc. Amer. Math. Soc. 65 (1977), 137–141.
- Nickolas, P., *Coproducts of abelian topological groups*, Topology Appl. 120 (2002), no. 3, 403–426.
- Smith, M. F., *The Pontrjagin duality theorem in linear spaces*, Ann. of Math. (2) 56, (1952), 248–253.